

Sprężysta faza pracy kończy się z chwilą, gdy $\sigma = R'_e$ i gdy

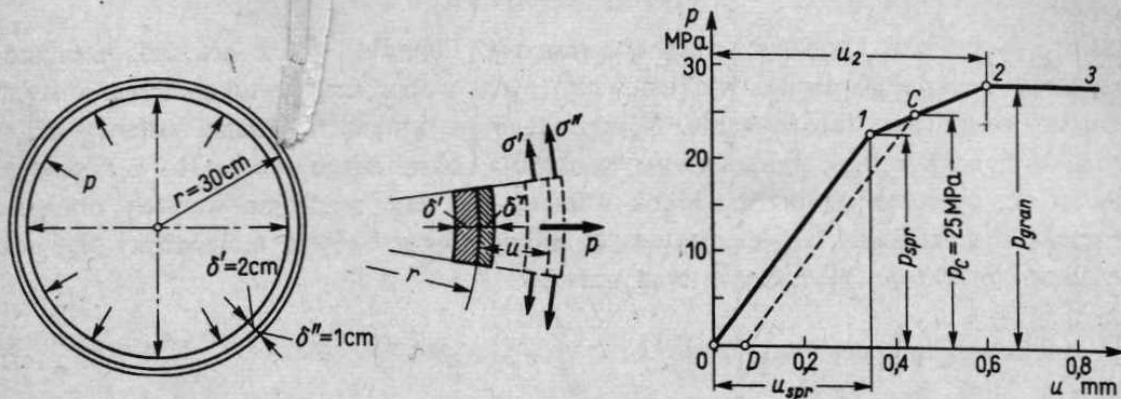
$$p = p_{spr} = R'_e(\delta' + \delta'')/r = 23 \text{ MPa}, \quad u_{spr} = R'_e r/E' = 0,345 \text{ mm}.$$

Gdy $p > p_{spr}$, pierścień wewnętrzny staje się plastyczny ($\sigma' = R'_e = \text{const}$), natomiast w zewnętrznym jest nadal $\sigma'' = E'u/r$, skąd

$$p = (\sigma' \delta'/r) + (\sigma'' \delta''/r) = (R'_e \delta'/r) + (E'u \delta''/r^2),$$

a więc p rośnie wraz z u , przy czym $u > u_{spr}$. Ta faza trwa, dopóki $\sigma'' < R'_e$. Gdy $\sigma'' = R'_e$, czyli gdy

$$p = p_{gran} = (\delta' + R'_e \delta'')/r = 28,7 \text{ MPa}, \quad u_2 = R'_e r/E' = 0,600 \text{ mm},$$



Rys. 14.9. Praca zespołu pierścieni w stanie sprężysto-plastycznym

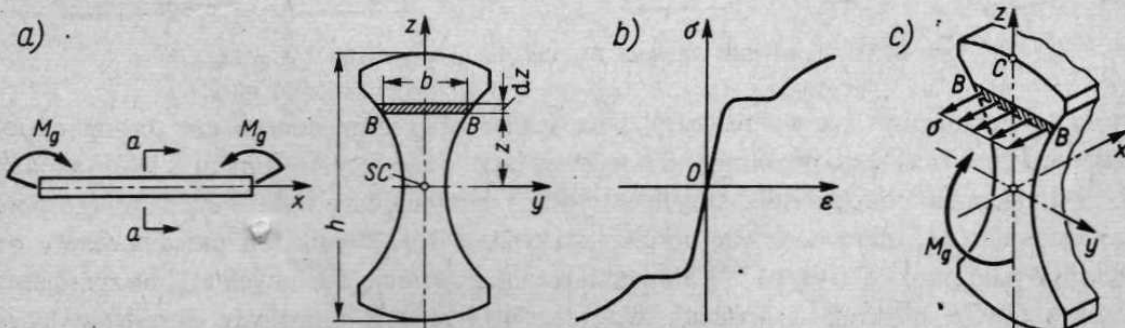
wówczas pierścień zewnętrzny przechodzi w stan plastyczny i przy dalszym wzroście u jest $p = p_{gran} = \text{const}$. Cały przebieg $p(u)$ podaje wykres 0, 1, 2, 3.

7. Zespół pierścieni z zadania 6 obciążono ciśnieniem $p_c = 25 \text{ MPa}$. Jakie naprężenia σ' i σ'' zostaną po odciążeniu?

Odp. Z wykresu (rys. 14.9) lub analitycznie $u_{trwale} = \overline{OD} = 0,060 \text{ mm}$, skąd $\sigma'' = E' u_{trwale}/r = 40 \text{ MPa}$, a $\sigma' = -\sigma'' \delta''/\delta' = -20 \text{ MPa}$,

14.2. Zginanie belki sprężysto-plastycznej

Zacniemy od analizy czystego zginania (rys. 14.10a). Dla prostoty zakładamy, że przekrój belki ma dwie osie symetrii y, z , moment gnący M_g działa w płaszczyźnie xz , a wykres $\sigma(\varepsilon)$ jest symetryczny względem O (rys. 14.10b). Z racji symetrii warstwą obojętną



Rys. 14.10. Czyste zginanie sprężysto-plastyczne

jest oś y , a zgięcie zachodzi w płaszczyźnie xz . Wartość M_g jest przy tym większa od wartości M_{spr} , dla której we włóknach skrajnych osiągamy granicę sprężystości, tj.

$$M_{spr} = \sigma_{spr} W_y = 2\sigma_{spr} J_y/h. \quad (a)$$

Ponieważ przy czystym zginaniu przekroje zostają zawsze płaskie, niezależnie od tego, czy materiał jest sprężysty, czy nie (art. 5.5), zatem odkształcenie względne ε we włóknach warstwy BB wyraża się wzorem (5.7), czyli

$$\varepsilon = -z/\varrho, \quad (b)$$

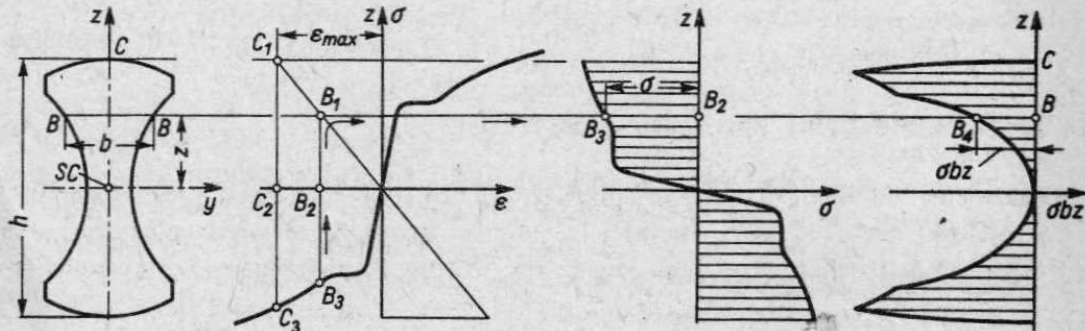
gdzie ϱ — promień krzywizny warstwy obojętnej. Ponadto, jak w art. 5.5, pomijamy wzajemne poprzeczne naciski włókien wzdłużnych, wobec czego włókna te są w stanie prostego rozciągania lub ściskania. Naprężenia σ we włóknach badanej warstwy BB są jednakowe, a ich wartość wynika z wykresu $\sigma(\varepsilon)$ dla ε określonego wzorem (b). Elementarna siła $\sigma b dz$, przenoszona przez włókna warstwy BB daje względem warstwy obojętnej moment $\sigma b dz z$. Suma tych elementarnych momentów jest równa momentowi M_g , jako wysiłkowi przekroju. Wynikająca stąd wartość

$$M_g = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma b z dz \quad (14.1)$$

zależy od krzywizny $1/\varrho$. Funkcję tę, czyli $M_g(1/\varrho)$, wyznaczamy metodą wykreślną-analityczną. W tym celu obieramy pewną wartość ε_{max} w skrajnym włóknie C , dla której

$$1/\varrho = 2\varepsilon_{max}/h. \quad (c)$$

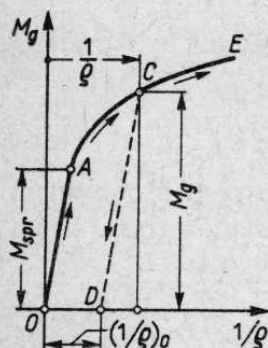
Łącząc teraz (rys. 14.11) obraz przekroju, rozkład $\varepsilon(z)$ oraz wykres $\sigma(\varepsilon)$ wyznaczamy dla badanej warstwy BB po kolei: odkształcenie ε (punkt B_1), wartość σ (rzędna B_2B_3),



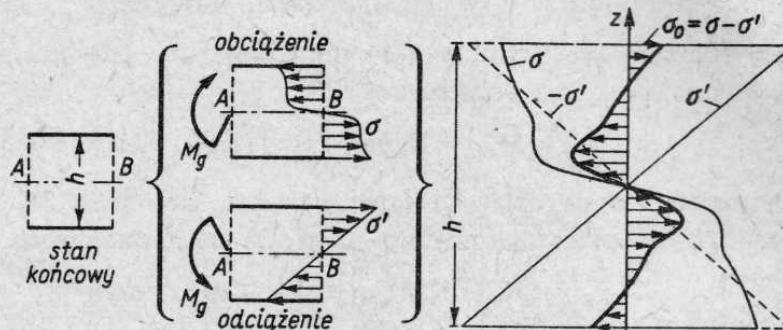
Rys. 14.11. Określenie wartości M_g dla danej krzywizny $1/\varrho = 2\varepsilon_{max}/h$

którą „przerzucamy” na wykres $\sigma(z)$, i na koniec obliczamy iloczyn σbz , biorąc odpowiednio b i z z obrazu przekroju. Tę wartość σbz nanosimy w funkcji z jako odcinek $B_4 B$. Postępując podobnie dla innych wartości z otrzymujemy wykres σbz , którego pole daje moment M_g odpowiadający obranej krzywiznie $1/\varrho$. Wynik ten przedstawiamy na wykresie jako punkt C (rys. 14.12). Powtarzając taką operację dla innych ε_{max} otrzymujemy krzywą $OACE$ obrazującą przebieg $M_g(1/\varrho)$. Wykres ten umożliwia określenie ugięć belki oraz trwałej krzywizny $1/\varrho_0$ po jej odciążeniu, gdyż wartość $1/\varrho_0 = \overline{OD}$, tj. odcinkowi

wynikającemu z przecięcia $CD \parallel OA$ z osią odciętych. Temu trwałemu zakrzywieniu odpowiadają tzw. *resztkowe* lub *własne naprężenia* σ_0 (rys. 14.13) jako algebraiczna suma znanych już naprężeń σ przy obciążeniu M_g (rys. 14.11) i naprężeń σ' przy odciążeniu, gdy



Rys. 14.12. Wykres $M_g(1/q)$



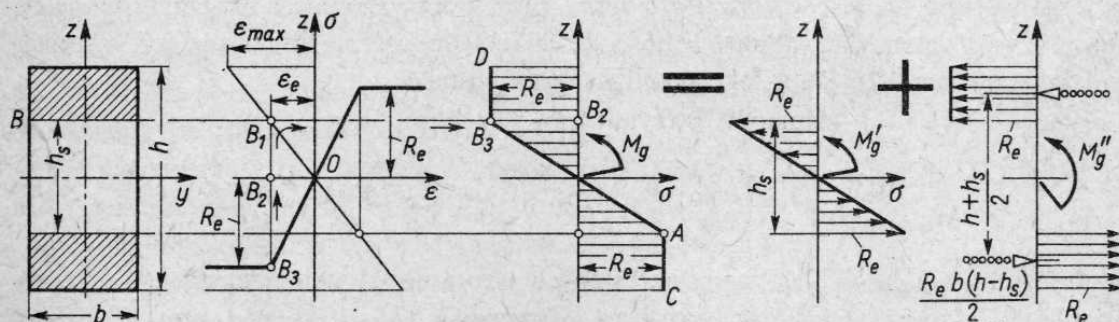
Rys. 14.13. Naprężenia własne przy zginaniu sprężysto-plastycznym

tenże moment M_g ma zwrot przeciwny. W tym drugim przypadku materiał zachowuje się sprężystie, a rozkład $\sigma'(z)$:

$$\sigma'(z) = M_g z / J_y \quad (d)$$

jest liniowy. Określony z nałożenia wykresów σ i σ' rozkład $\sigma_0(z)$ jest *samozrównoważony*, czyli że jego wypadkowa siła wzdłużna i moment gnący są równe zero.

Gdy materiał jest idealnie plastyczny, opisaną ogólną metodę wykreślną-analityczną można zastąpić metodami analitycznymi. Dla przykładu, w belce o przekroju prostokątnym przy obciążeniu powodującym uplastycznienie zewnętrznych zakreskowanych części przekroju (rys. 14.14) profil $\sigma(z)$ jest linią łamaną, której odcinek AB_3 odpowiada sprężystej



Rys. 14.14. Zginanie belki z materiału idealnie plastycznego

części przekroju, a odcinki AC i B_3D częściom uplastycznionym. Moment gnący M_g jest równy sumie momentu $M'_g = R_e b h_s^2 / 6$ belki sprężystej o wymiarach $b \times h_s$ i momentu $M''_g = R_e b (h - h_s)(h + h_s) / 4$ odpowiadającego częściom uplastycznionym, w których $\sigma = \pm R_e = \text{const}$. W wyniku

$$M_g = M'_g + M''_g = \frac{R_e b h^2}{12} \left[3 - \left(\frac{h_s}{h} \right)^2 \right] = \frac{M_{\text{spr}}}{2} \left[3 - \left(\frac{h_s}{h} \right)^2 \right], \quad (e)$$

gdzie $M_{spr} = R_e b h^2 / 6$ — moment gnący, przy którym maksymalne naprężenia są równe granicy sprężystości utożsamionej tu z R_e . Odpowiadającą momentowi M_g krzywiznę określamy z wzoru (b) wstawiając $\varepsilon = \varepsilon_e = R_e / E$, $z = h_s / 2$, skąd

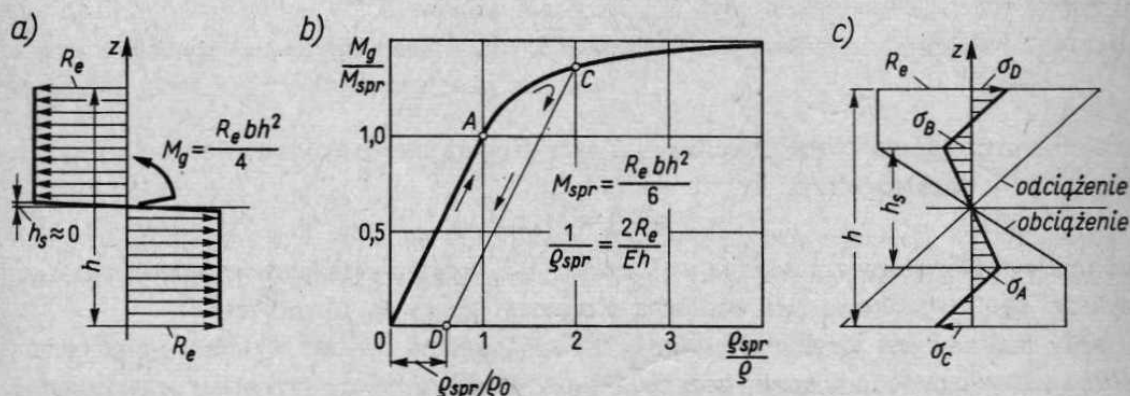
$$1/\varrho = 2\varepsilon_e / h_s = 2R_e / E h_s. \quad (f)$$

Przedyskutujemy sens wyników (e) i (f) w funkcji h_s . Gdy $h = h_s$, czyli gdy cały przekrój jest jeszcze sprężysty, wówczas

$$M_g = M_{spr} = R_e b h^2 / 6, \quad (1/\varrho)_{spr} = 2R_e / E h = M_{spr} / E J_y. \quad (g)$$

Przy wzroście strefy uplastycznionej maleje h_s , natomiast M_g i $1/\varrho$ rosną. Przy pełnym uplastycznieniu przekroju, gdy $h_s \rightarrow 0$, a $\sigma(z)$ ma postać dwóch prostokątów (rys. 14.15a)

$$M_g \rightarrow 1,5 M_{spr}, \quad 1/\varrho \rightarrow \infty, \quad \text{czyli} \quad \varrho \rightarrow 0.$$



Rys. 14.15. Dyskusja wyników analizy zginania belki o przekroju prostokątnym

Powyższa wartość M_g jest *wartością graniczną*, przy której, zgodnie z przyjętym modelem materiału, wyczerpana jest całkowicie nośność belki. Jednocześnie fakt, że $\varrho = 0$, wskazuje na niemożność zrealizowania tego stanu w rzeczywistości.

Rugując z (e) i (f) wymiar h_s otrzymujemy zależność

$$\frac{M_g}{M_{spr}} = \frac{1}{2} \left[3 - \left(\frac{\varrho}{\varrho_{spr}} \right)^2 \right] \quad \text{lub} \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_{spr}} \left(3 - 2 \frac{M_g}{M_{spr}} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (h)$$

odniesioną do wielkości M_{spr} i ϱ_{spr} określonych wzorami (g). Jej przebieg (rys. 14.15b) wskazuje na szybszy w zakresie sprężysto-plastycznym ($M_g > M_{spr}$) wzrost krzywizny niż wzrost M_g . Trwałą krzywiznę $1/\varrho_0$ belki odpowiadającą, jak wiadomo, odcinkowi OD możemy tu określić analitycznie jako różnicę krzywizny $1/\varrho$ danej wzorem (h) oraz krzywizny $1/\varrho' = M_g / E J_y$ odpowiadającej sprężystemu odciążeniu

$$\frac{1}{\varrho_0} = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{\varrho_{spr}} \left(3 - 2 \frac{M_g}{M_{spr}} \right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{M_g}{E J_y}. \quad (i)$$

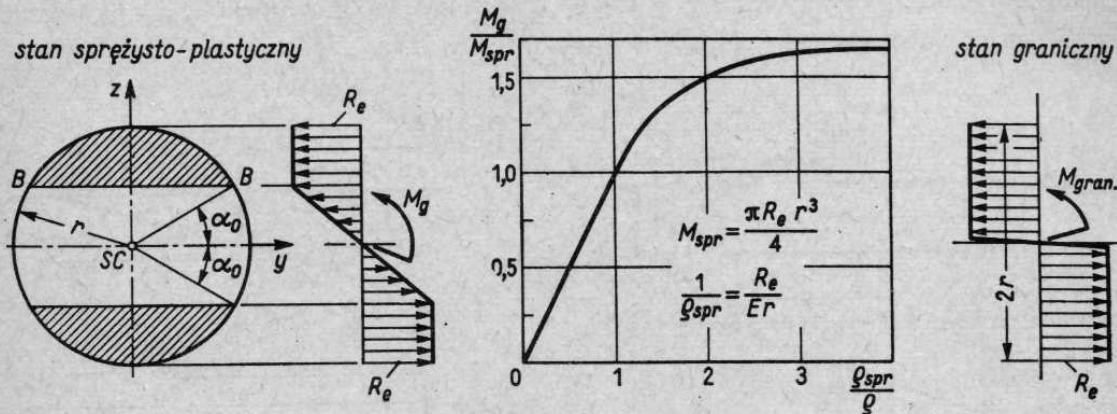
Jak wyjaśniono poprzednio, po odciążeniu belki panuje w niej samozrównowagowany stan naprężeń resztkowych. W badanym tu przypadku ten stan ma postać jak na rys. 14.15c,

przy czym

$$\sigma_D = -\sigma_C = \frac{6M_g}{bh^2} - R_e, \quad \sigma_B = -\sigma_A = \frac{6M_g}{bh^2} \sqrt{3 - 2 \frac{M_g}{M_{spr}}} - R_e. \quad (j)$$

Podobnie obliczamy zależność $M_g(1/\varrho)$ dla innych przekrojów. W przekroju na przykład kołowym (rys. 14.16) otrzymujemy

$$\left. \begin{aligned} M_g &= (R_e r^3/6) [3(\alpha_0/\sin \alpha_0) + 3 \cos \alpha_0 + 2 \cos^3 \alpha_0], \\ 1/\varrho &= R_e/Er \sin \alpha_0, \end{aligned} \right\} \quad (k)$$



Rys. 14.16. Sprężysto-plastyczne zginanie pręta kołowego

gdzie α_0 — kąt określający położenie warstwy BB rozdzielającej uplastycznioną i sprężystą część przekroju. Odpowiadający wynikom (k) wykres $M_g(1/\varrho)$ ma asymptotę poziomą, gdy cały przekrój jest uplastyczniony ($\alpha_0 \approx 0$) i gdy

$$M_g = M_{gran} = 4R_e r^3/3. \quad (l)$$

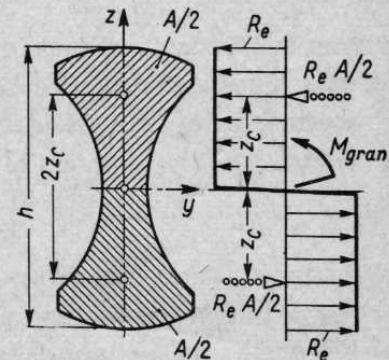
Powyższa wartość, przy której wyczerpana jest całkowicie nośność belki, jest $\sim 1,7$ razy większa niż moment $M_{spr} = R_e W_y = \pi r^3 R_e/4$, przy którym skrajne włókna osiągają po raz pierwszy wartość R_e .

W porównaniu z powyższymi rozważaniami znacznie prostsza jest analiza stanu granicznego, którego znajomość jest konieczna do oceny bezpieczeństwa. Ponieważ w dowolnym symetrycznym przekroju stan ten odpowiada dwuprostokątnemu rozkładowi $\sigma(z)$ (rys. 14.17), zatem moment graniczny jest

$$M_{gran} = (R_e A/2) 2z_c = R_e A z_c, \quad (14.2)$$

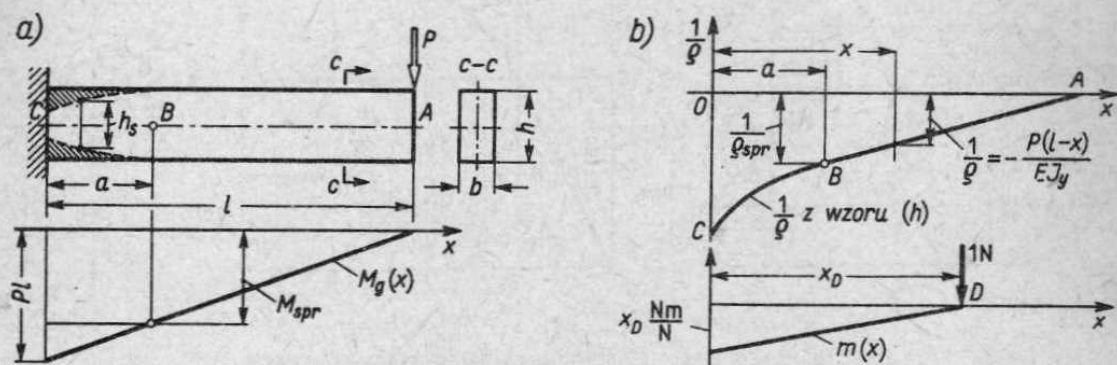
gdzie z_c — odległość środka ciężkości pola $A/2$, czyli połowy całego przekroju od warstwy obojętnej (oś y).

Ustalona tą czy inną metodą zależność $M(1/\varrho)$ jest punktem wyjścia analizy *poprzecznego zginania* w zakresie sprężysto-plastycznym. Weźmy dla przykładu wykonaną z materiału idealnie plastycznego belkę wspornikową o przekroju prostokątnym (rys. 14.18a),



Rys. 14.17. Określenie M_{gran}

w której obciążenie P jest takie, że $M_{spr} < Pl < M_{gran}$. Długość a , na której przekroje są częściowo uplastycznione, obejmuje część belki przy utwierdzeniu, gdzie $M_g > M_{spr}$. Pomijając wpływ naprężeń stycznych obliczamy rozkład $\sigma(z)$ jak w przypadku czystego zginania (rys. 14.14). Wstawiając mianowicie do wzoru (e) wartość M_g dla szeregu przekrojów, określamy w każdym z nich wymiar h_s sprężystej części przekroju, a stąd otrzymujemy uplastyczniony obszar belki zakreskowany na rysunku. Jeśli maksymalny moment Pl zbliża się do wartości M_{gran} , to te uplastycznione obszary zbliżają się do warstwy obojętnej przekroju utwierdzonego. W przypadku gdy $Pl = M_{gran}$, mamy uplastycznienie tego przekroju (rys. 14.15a), przy czym $h_s = 0$, $\varrho = 0$ i przekrój ten zachowuje się jak *plastyczny przegub* przenoszący moment M_{gran} .



Rys. 14.18. Analiza sprężysto-plastycznego zgięcia poprzecznego

Aby wyznaczyć ugięcia belki pracującej w stanie sprężysto-plastycznym, określamy najpierw jej krzywiznę $1/\varrho$ jako funkcję x (rys. 14.18b). W sprężystym odcinku BC badanej belki mamy oczywiście

$$1/\varrho = M_g/EJ_y = -P(l-x)/EJ_y,$$

natomiast dla odcinka CB wykorzystujemy wzór (h) bądź wykres $M_g(1/\varrho)$ jak na rys. 14.15b. Po tej czynności postępujemy jak opisano w art. 9.3. I tak, chcąc obliczyć ugięcie f_D punktu D obciążamy belkę siłą 1 N („czujnikiem”), określamy odpowiadający jej moment $m(x)$, a następnie według wzoru (9.1) wyznaczamy

$$f_D = \int m d\vartheta = \int (m/\varrho) dx, \quad (14.3)$$

gdyż odpowiadający krzywiznie $1/\varrho$ elementarny względny kąt obrotu $d\vartheta = dx/\varrho$. Wskazane tu całkowanie przeprowadzamy wykreślnie.

Podobnie rozwiązujemy zagadnienia dla innych postaci przekrojów i innych materiałów niż idealnie plastyczne.

Zadania

1. Określić stosunek M_{gran}/M_{spr} dla belek o podanych przekrojach (rys. 14.19) wykonanych z materiału idealnie plastycznego.

Odp. a) 1,40; b) 2; c) $3H [B(H^2 - h^2) + bh^2]/2 [B(H^3 - h^3) + bh^3]$.